# 618. 豊田浩七氏ノ論文ヲ讀ミテ

吉田　耕作（阪大）

$\mathfrak{R}$ ヲ距離付ケラレタ環トシ $X, U \in \mathfrak{R}$ 且ツ實數 $\alpha$ ノ小サイトキ

$$\begin{cases} \exp(X+\alpha U) = (\exp X)\{E + \alpha\varphi(U,X) + O(\alpha^2)\}, \\ \qquad\qquad E \text{ ハ } \mathfrak{R} \text{ ノ單位} \\ \varphi(U,X) = \dfrac{U}{\lfloor 1} + \dfrac{[U,X]}{\lfloor 2} + \dfrac{[[U,X],X]}{\lfloor 3} + \cdots\cdots \end{cases}$$

ガ成立スル（前談話 607）。コヽニ $[U,X] = UX - XU$.

今 $\mathfrak{J}$ ヲ $\mathfrak{R}$ ニ横ハル *Lie-ring* トシ其ノ *base* ヲ $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_r$ トスル：

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ijk} X_k,\quad U = \sum_{i=1}^{r} t_i X_i,\quad X = \sum_{i=1}^{r} s_i X_i$$

トオケバ上式カラ

$$\begin{cases} \varphi(U,X) = \|X_1, X_2, \cdots\cdots, X_r\| \left\| \dfrac{e^{H(s)} - E}{H(s)} \right\| \begin{Vmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_r \end{Vmatrix} \\ H(s) = \|h_{ki}(s)\|,\quad h_{ki}(s) = \sum_{j=1}^{r} s_j c_{ijk} \end{cases}$$

ヲ得ル。

偖テ今 $f_1(x), \cdots\cdots, f_r(x)$ ヲ $x=0$ デ $0$ ニナル如キ $x=0$ ノ近傍デノ実数値解析函数トスル。然ラバ

$$\exp\left\{\sum_{i=1}^{r} f_i(x+\Delta x)X_i\right\}$$

$$=\exp\left\{\sum_{i=1}^{r} f_i(x)X_i+\Delta x\sum_{i=1}^{r}\left(f_i'(x)+O(\Delta x)\right)X_i\right\}$$

ニ上式ヲ應用スレバ

$$F(x)=\exp\left\{\sum_{i=1}^{r} f_i(x)X_i\right\} \text{ ハ}$$

$$\frac{dF(x)}{dx}=F(x)\cdot\left\{\left\|X_1,\cdots\cdots,X_r\right\|\left\|\frac{e^{H(f(x))}-E}{H(f(x))}\right\|\left\|\begin{matrix}f_1'(x)\\ \vdots\\ f_r'(x)\end{matrix}\right\|\right\}$$

ヲ満足スルコトガワカル。ヨツテ任意ニ $x=0$ ノ近傍デノ實數値解析函数 $g_1(x), \cdots\cdots, g_r(x)$ ヲ與ヘタトキ

$$\left\|\frac{e^{H(f(x))}-E}{H(f(x))}\right\|\left\|\begin{matrix}f_1'(x)\\ \vdots\\ f_r'(x)\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}g_1(x)\\ \vdots\\ g_r(x)\end{matrix}\right\|$$

ヲ解イテ $x=0$ デ $0$ ニナル $x=0$ ノ近傍デノ実数値解析函数 $f_1(x), \cdots\cdots, f_r(x)$ ヲ求ムレバ（求メ得レコトハ上ノ方程式ノ形カラ明カ）

$$\frac{dG(x)}{dx}=G(x)\left\{\sum_{i=1}^{r} g_i(x)X_i\right\},\quad G(0)=E$$

ナル $G(x)$ ハ $\exp\left(\sum_{i=1}^{r} f_i(x)X_i\right)$ ニ一致スル。

先日墨田浩七氏ノ論文（東北大理科報告25巻1号，2号）ヲ讀ンデ結局ソノ *essence* ハ上ノ事実（$G(x)$ が上ノ如ク exp デ表ハサレル）ニアルヤウニ思ハレマシタノデコヽニ別証明ヲ試ミタ次第デス。